

10 класс

Первый день

- 10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 10.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.
- 10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?
- 10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.
- 10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Центры вписанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P . Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB , BOC , COD , DOA не превосходит $\frac{P}{2}$.